

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2 \cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos^2 x = -1$, что невозможно, или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$,

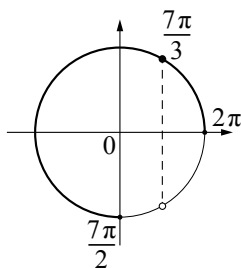
$$n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{7\pi}{3}$.



14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC , прямые KL , BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL : LB = SK : KC = DN : NC = AM : MB.$$

Таким образом, прямая LM , лежащая в плоскости α , параллельна прямой SA , а значит, плоскость α параллельна прямой SA .

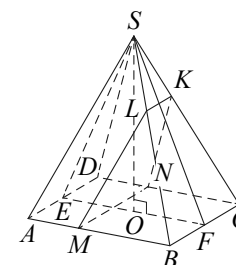
б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD , искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC . Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC , а прямые SE и EF — прямой AD . Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD , а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF . Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF , откуда

$$EO = 3, SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{10};$$

$$\sin \angle ESO = \frac{OE}{SE} = \frac{3\sqrt{10}}{20}; \angle ESF = 2\angle ESO = 2 \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ: б) $2 \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{20}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство $\log_3((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3(x^2-5x+6) + \log_3(4-x)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3((2-x)(3-x)) + \log_3(4-x);$$

$$\log_3(2-x) + \log_3(x^2+5) \geq \log_3(2-x) + \log_3(3-x) + \log_3(4-x).$$

Неравенство определено при $x < 2$, поэтому при $x < 2$ неравенство принимает вид:

$$x^2 + 5 \geq (3-x)(4-x); x^2 + 5 \geq x^2 - 7x + 12; 7x \geq 7,$$

откуда $x \geq 1$. Учитывая ограничение $x < 2$, получаем: $1 \leq x < 2$.

Ответ: $[1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

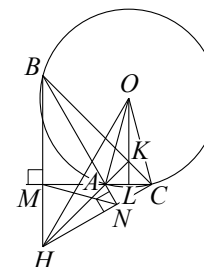
16 В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.

Решение.

а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC , поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC} = \cos \angle NAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN , равен $\frac{AO}{2}$.



Точки M и N лежат на окружности диаметром AH , поэтому $AH = AO$.

б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K , а точка L — середина стороны AC , тогда

$$\angle AKB = 90^\circ, \angle AOL = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 2 \angle ABC = \angle ABC = 15^\circ.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \angle OAL &= 90^\circ - \angle AOL = 75^\circ, \angle BAK = 90^\circ - \angle ABC = 75^\circ; \\ \angle OAH &= 180^\circ - \angle OAK = 180^\circ - (\angle BAK + \angle OAL - \angle BAC) = 150^\circ. \end{aligned}$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO \cdot AH \cdot \sin \angle OAH}{2} = \frac{AO^2 \cdot \sin 150^\circ}{2} = \frac{BC^2 \cdot \sin 150^\circ}{8 \sin^2 120^\circ} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10; \frac{10(n-1)}{n}; \dots; \frac{10 \cdot 2}{n}; \frac{10}{n}; 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11; \frac{11(n-1)}{n}; \dots; \frac{11 \cdot 2}{n}; \frac{11}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1 + \frac{10}{n}; \frac{(n-1)+10}{n}; \dots; \frac{2+10}{n}; \frac{1+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10 + \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = 10 + \frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 15 млн рублей, поэтому $n = 9$.

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $4x^2 - a^2 = 0$, для которых выполнено условие $x^2 + 6x + 9 - a^2 \neq 0$.

Поскольку $4x^2 - a^2 = (2x - a)(2x + a)$, уравнение $4x^2 - a^2 = 0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2 , заданных уравнениями $a = 2x$ и $a = -2x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a = 0$ и имеет два корня при $a \neq 0$.

Поскольку

$$x^2 + 6x + 9 - a^2 = (x + 3 - a)(x + 3 + a),$$

уравнение $x^2 + 6x + 9 - a^2 = 0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2 , заданных уравнениями $a = x + 3$ и $a = -x - 3$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x, & \begin{cases} x + 3 = 2x, & \begin{cases} x = 3, \\ a = 6. \end{cases} \\ a = x + 3; & \begin{cases} a = x + 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(3; 6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x, & \begin{cases} -x - 3 = 2x, & \begin{cases} x = -1, \\ a = -2. \end{cases} \\ a = -x - 3; & \begin{cases} a = -x - 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1; -2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -2x, & \begin{cases} x + 3 = -2x, & \begin{cases} x = -1, \\ a = 2. \end{cases} \\ a = x + 3; & \begin{cases} a = x + 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1; 2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -2x, & \begin{cases} -x - 3 = -2x, & \begin{cases} x = 3, \\ a = -6. \end{cases} \\ a = -x - 3; & \begin{cases} a = -x - 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(3; -6)$.

Следовательно, условие $x^2 + 6x + 9 - a^2 \neq 0$ выполнено для корней уравнения $4x^2 - a^2 = 0$ при всех a , кроме $a = -6$, $a = -2$, $a = 2$ и $a = 6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a < -6$; $-6 < a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 2$; $2 < a < 6$; $a > 6$.

Ответ: $a < -6$; $-6 < a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 2$; $2 < a < 6$; $a > 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = 0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = 0$ и/или $a = 2$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -2$, $a = 0$ и/или $a = 6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.

а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $14 - 2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $14 + k$. Таким образом, n может быть равным 7.

б) Пусть $n = 4$, в первый день на доску записали число 1 и 32 числа 2, во второй день — 12 чисел 4 и 20 чисел 5, в третий день — 6 чисел 4 и 25 чисел 5, а в четвёртый день — 30 чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 65, во второй — 148, в третий — 149, а в четвёртый — 150. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{32}{33} < 2$, а среднее

арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{4}{63} > 4$.

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 5 чисел. Значит, если $n > 4$, то в пятый день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 5. Таким образом, $n \leq 4$.

Если $n = 4$, то в четвёртый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 9 и 8 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 32.

Если $n = 3$, то в третий день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 14, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 34.

Если $n = 2$, то во второй день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 25.

Если $n = 1$, то сумма всех записанных чисел равна 5.

Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 34.

Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 34. Пусть $n = 3$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 3, 3, 4, 4; в третий — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно

равны 5, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 34.

Ответ: а) да; б) да; в) 34.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта a ; — обоснованное решение пункта b ; — искомая оценка в пункте b ; — пример в пункте b , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4